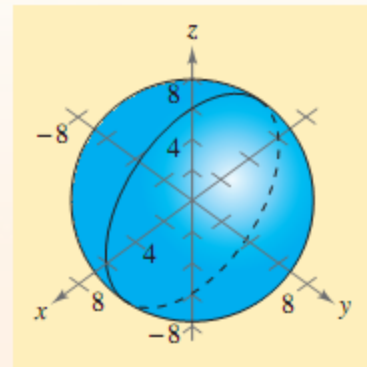
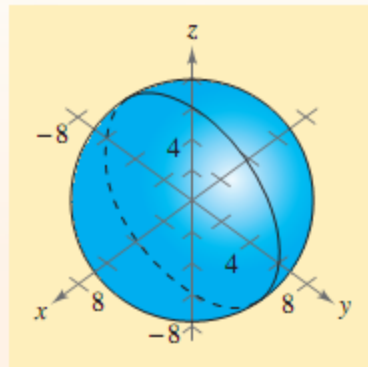
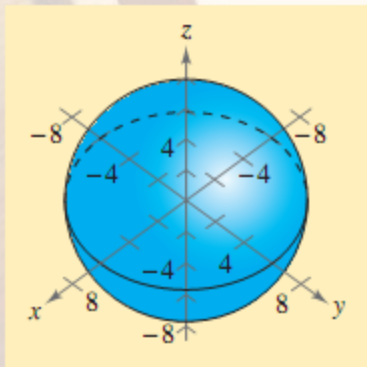


BOLA

Geometri Analitik Ruang



Oleh
Mega Teguh Budiarto

Persamaan Bola

Persamaan bola dengan pusat $P(a, b, c)$ dan berjari-jari r

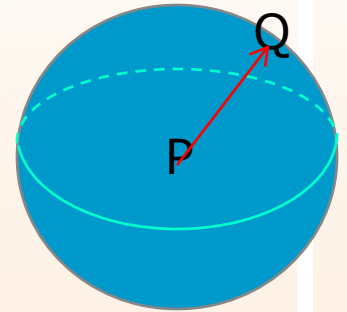
Ambil sebarang titik $Q(x, y, z)$ pada bola

Dapat ditentukan

$$\overrightarrow{PQ} = \langle (x - a), (y - b), (z - c) \rangle$$

$$|\overrightarrow{PQ}|^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2$$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$



DISKUSI

- Berikan minimal 3 contoh **persamaan bola**, beri alasan mengapa contoh yang saudara buat persamaan bola.
- Berikan minimal 3 contoh ***bukan persamaan bola***. Beri alasan mengapa contoh yang saudara buat bukan persamaan bola.
- Berikan diskripsi tentang persamaan bola sehingga dengan segera dapat diketahui apakah persamaan merupakan ***persamaan*** atau ***bukan persamaan*** bola.

Contoh 1

Tentukan persamaan bola yang berpusat di $(1,3,2)$ dan melalui titik $(2,5,0)$

Jawab

Jari-jari bola adalah jarak dua titik tersebut, yaitu:

$$r^2 = (2 - 1)^2 + (5 - 3)^2 + (0 - 2)^2 = 9$$

Persamaan bola yang dicari adalah persamaan bola dengan jari-jari 3 dan berpusat di titik $(1, 3, 2)$, yaitu:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

$$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 2)^2 = 9$$

Lakukan manipulasi aljabar dari persamaan di atas sehingga diperoleh $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y - 4z + 5 = 0$

Contoh 2

Tentukan pusat dan jari-jari bola, jika diketahui persamaan bola tersebut adalah sebagai berikut:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 10x - 8y - 12z + 68 = 0$$

Jawab

$$\text{Pusat} = \left(\frac{-(-10)}{2}, \frac{-(-8)}{2}, \frac{-(-12)}{2} \right) = (5, 4, 6)$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{-(-10)}{2} \right)^2 + \left(\frac{-(-8)}{2} \right)^2 + \left(\frac{-(-12)}{2} \right)^2 - 68} = \sqrt{9} = 3$$

Jadi bola berpusat pada titik (5,4,6) dan memiliki jari-jari 3

Tentukan persamaan bola bila diberikan fakta di bawah ini:

1. Center: $(0, 4, 3)$; radius: 3
2. Center: $(2, -1, 8)$; radius: 6
3. Center: $(-3, 7, 5)$; diameter: 10
4. Center: $(0, 5, -9)$; diameter: 8
5. Endpoints of a diameter: $(3, 0, 0)$, $(0, 0, 6)$
6. Endpoints of a diameter: $(2, -2, 2)$, $(-1, 4, 6)$

Tentukan titik pusat dari jari-jari dari persamaan bola di bawah ini, serta gambarlah grafik persamaan bola tersebut menggunakan perangkat lunak mathematica atau yang lain:

1. $x^2 + y^2 + z^2 - 5x = 0$

2. $x^2 + y^2 + z^2 - 8y = 0$

3. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y = 0$

4. $x^2 + y^2 + z^2 - x - y - z = 0$

5. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z + 10 = 0$

6. $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y + 9 = 0$

7. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 8z + 19 = 0$

8. $x^2 + y^2 + z^2 - 8y - 6z + 13 = 0$

9. $9x^2 + 9y^2 + 9z^2 - 18x - 6y - 72z + 73 = 0$

10. $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2x - 6y - 4z + 5 = 0$

11. $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 8x + 16y - 1 = 0$

12. $9x^2 + 9y^2 + 9z^2 - 18x + 36y + 54 - 126 = 0$

13. $9x^2 + 9y^2 + 9z^2 - 6x + 18y + 1 = 0$

14. $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 4x - 32y + 8z + 33 = 0$

Persamaan Bola melalui 4 titik

Persamaan umum bola

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$$

Diketahui titik $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$, $R(x_3, y_3, z_3)$,
dan $S(x_4, y_4, z_4)$ pada bola

Substitusikan titik-titik P, Q, R, dan S pada persamaan umum bola maka di peroleh

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$$

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$$

$$x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 + Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0$$

$$x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 + Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D = 0$$

$$x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 + Ax_4 + By_4 + Cz_4 + D = 0$$

Agar lima persamaan pada slide sebelumnya mempunyai penyelesaian untuk A, B, C, D maka harus dipenuhi (ingat aljabar linier)

•

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Contoh 3

(akan dikerjakan cara eliminasi substitusi)

Tentukan Persamaan umum dari bola yang diketahui melalui 4 titik berikut A (2, -1, 8), B(-3, -1, 3), C(2, 4, 3), dan D(2, 2, -1)!

Jawab

Misalkan persamaan umum bola yang akan ditentukan adalah:

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$$

- melalui A(2,-1,8), maka:

$$2^2 + (-1)^2 + 8^2 + 2A - B + 8C + D = 0$$

$$2A - B + 8C + D = -69 \text{(1)}$$

- melalui B(-3, -1, 3)

$$(-3)^2 + (-1)^2 + 3^2 - 3A - B + 3C + D = 0$$

$$-3A - B + 3C + D = -19 \dots\dots\dots(2)$$

- melalui C(2, 4, 3)

$$(2)^2 + (4)^2 + 3^2 + 2A + 4B + 3C + D = 0$$

$$2A + 4B + 3C + D = -29 \dots\dots\dots(3)$$

- melalui D(2, 2, -1)

$$(2)^2 + (2)^2 + (-1)^2 + 2A + 2B - C + D = 0$$

$$2A + 2B - C + D = -9 \dots\dots\dots(4)$$

Eliminasi B dan D dari persamaan (1) dan (2), diperoleh:

$$5A + 5C = -50 \rightarrow A + C = -10 \dots\dots\dots(6)$$

Eliminasi A dan D dari persamaan (1) dan (3), diperoleh:

$$-5B + 5C = -40 \rightarrow -B + C = -8 \dots\dots\dots(7)$$

Eliminasi A dan D dari persamaan (1) dan (4), diperoleh:

$$-5B + 9C = -60 \rightarrow -B + 3C = -20 \dots\dots\dots(8)$$

Eliminasi B dari persamaan (7) dan (8), diperoleh $C = -6$

Substitusi $C = -6$ ke persamaan (7) atau (8), diperoleh: $B = 2$

Substitusi $C = -6$ ke persamaan (6), diperoleh $A = -4$

Substitusi $A = -4$, $B = 2$, dan $C = -6$ ke persamaan (1), (2), (3) atau (4)

$$\dots\dots\dots D = 11$$

KERJA BERPASANGAN

- Kerjakan contoh 3 menggunakan determinan

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Persamaan bidang singgung bola di suatu titik pada bola

Misal $T(x_1, y_1, z_1)$ pada bola

Dan α bidang singgung bola di titik T

Dapat ditentukan $\overrightarrow{PT} = \langle (x_1 - a), (y_1 - b), (z_1 - c) \rangle$

Ambil sebarang titik $V(x, y, z)$

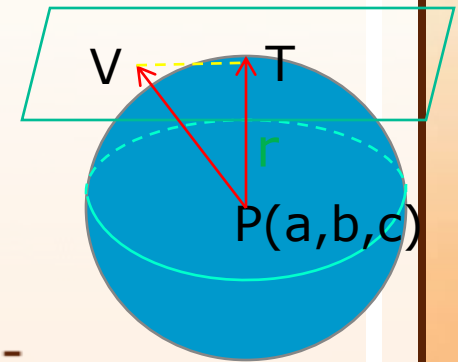
Dapat ditentukan $\overrightarrow{PV} = \langle (x - a), (y - b), (z - c) \rangle$

Proyeksi \overrightarrow{PV} terhadap \overrightarrow{PT} adalah r dengan r jari-jari bola

$$r = \frac{\overrightarrow{PV} \cdot \overrightarrow{PT}}{|\overrightarrow{PT}|}$$

$$r = \frac{\overrightarrow{PV} \cdot \overrightarrow{PT}}{r}$$

$$r^2 = \overrightarrow{PV} \cdot \overrightarrow{PT}$$



$$r^2 = \overrightarrow{PV} \cdot \overrightarrow{PT}$$

$$r^2 = \overrightarrow{PT} \cdot \overrightarrow{PV}$$

$$\overrightarrow{PT} \cdot \overrightarrow{PV} = r^2$$

$$\langle (x_1 - a), (y_1 - b), (z_1 - c) \rangle \cdot \langle (x - a), (y - b), (z - c) \rangle = r^2$$

$$(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) + (z_1 - c)(z - c) = r^2$$

$$x_1x + y_1y + z_1z - a(x_1 + x) - b(y_1 + y) - c(z_1 + z) + a^2 + b^2 + c^2 - r^2 = 0$$

$$x_1x + y_1y + z_1z + \frac{A}{2}(x_1 + x) + \frac{B}{2}(y_1 + y) + \frac{C}{2}(z_1 + z) + D = 0$$

Jika titik T tidak pada bola persamaan pada slide sebelumnya dinamakan bidang kutub dari titik T . Selidiki bagaimana kalau T tidak pada bola.

KERJA BERPASANGAN

Buatlah soal "mencari persamaan bidang kutub dari suatu titik T pada bola". Soal yang sudah saudara buat, tukar dengan soal yang dibuat pasangan saudara! Kemudian kerjakan!

Contoh 4

Tentukan persamaan bidang singgung pada bola $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y + 4z = 0$ di titik $(0,0,0)$

Jawab

$$0x + 0y + 0z + \frac{2}{2}(0 + x) + \frac{4}{2}(0 + y) + \frac{4}{2}(0 + z) + 0 = 0$$

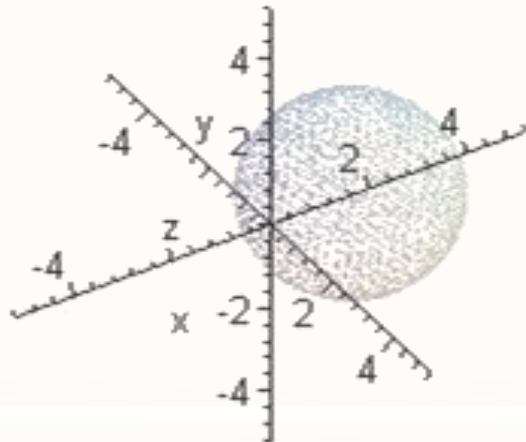
Sehingga persamaan bidang singgung bola adalah $x + 2y + 2z = 0$

MENGGAMBAR GRAFIK BOLA BERBANTUAN MAPLE.10

BOLA: $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=4$

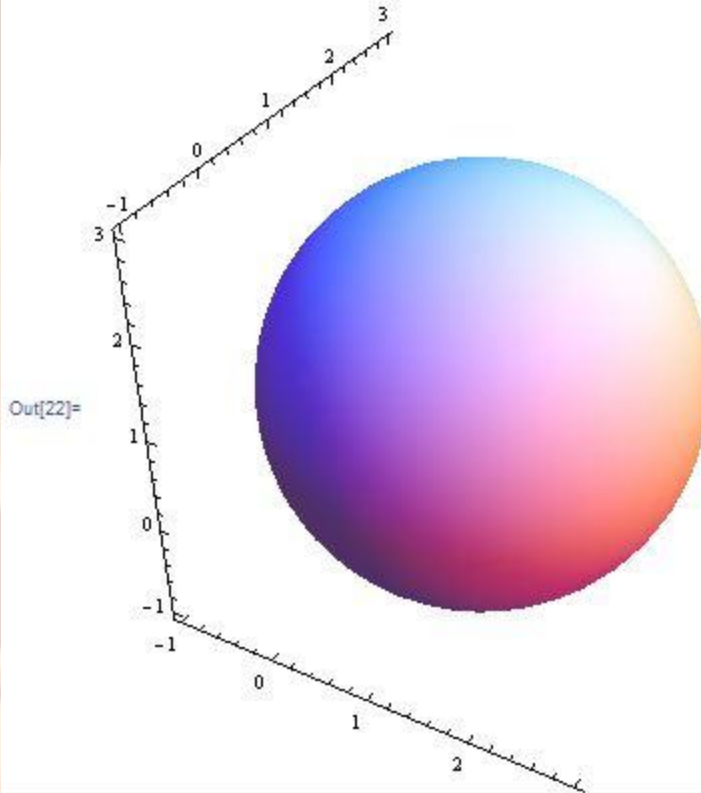
> **with(plots):**

> **implicitplot3d((x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=4,x=-5..5,y=-5..5,z=-5..5,grid=[40,40,40]);**



Menggambar bola menggunakan Mathematica 9.0.1

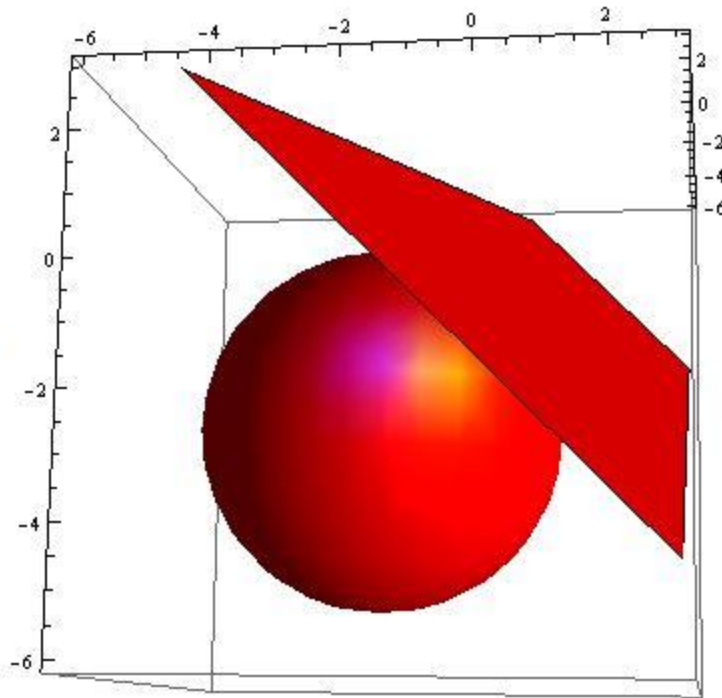
```
In[22]:= Graphics3D[Sphere[{1, 1, 1}, 2], Boxed → False, Axes → True]
```



Menggambar bola dan bi menggunakan Mathematica 9.0.1

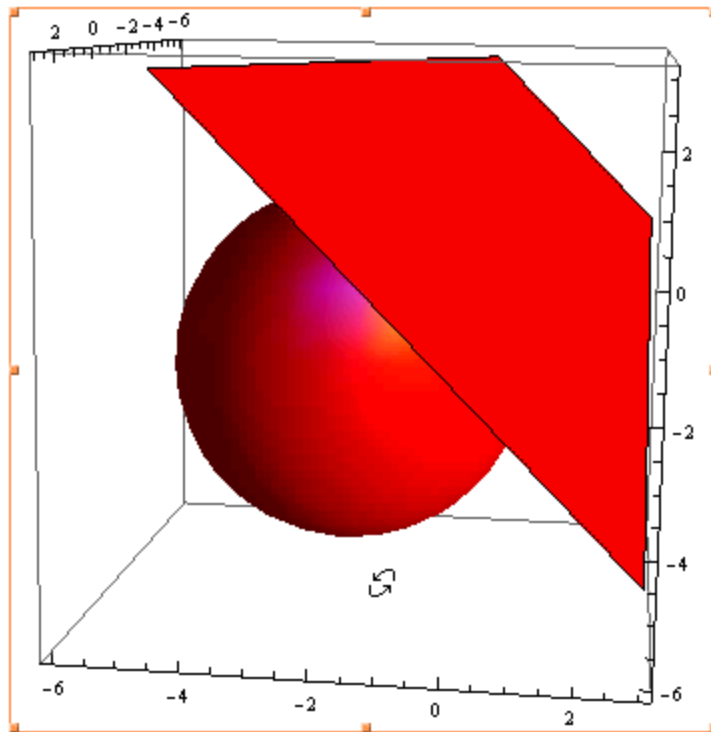
```
In[23]:= m = x^2 + y^2 + z^2 + 2*x + 4*y + 4*z;  
n = x + 2*y + 2*z;  
ContourPlot3D[{m = 0, n = 0}, {x, -6, 3}, {y, -6, 3}, {z, -6, 3},  
MeshFunctions -> {Function[{x, y, z, f}, m - n]},  
MeshStyle -> {{Thick, Blue}}, Mesh -> {{0}},  
ContourStyle -> Directive[Red, Opacity[1], Specularity[White, 30]]]
```

Out[25]=



```
In[23]:= m = x^2 + y^2 + z^2 + 2*x + 4*y + 4*z;  
n = x + 2*y + 2*z;  
ContourPlot3D[{m = 0, n = 0}, {x, -6, 3}, {y, -6, 3}, {z, -6, 3},  
  MeshFunctions -> {Function[{x, y, z, f}, m - n]},  
  MeshStyle -> {{Thick, Blue}}, Mesh -> {{0}},  
  ContourStyle -> Directive[Red, Opacity[1], Specularity[White, 30]]]
```

Out[25]=



axes ▾ background ▾ viewpoint ▾ remove bounding box more...   

```
In[19]:= Show[%18, Boxed -> False]
```

TEKNOLOGI

- Tentukan pusat dan jari-jari bola dengan persamaan seperti contoh 4.
- Gunakan Perangkat Lunak MATHEMATICA 9.0.1 atau MAPLE.10 untuk membuat gambar bola dan bidang singgung
- Kerjakan hal yang sama untuk contoh 1 dan 2

Kedudukan titik $T(x_1, y_1, z_1)$ terhadap bola
 $x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$

Jika kita substitusikan T pada bola diperoleh

1. $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$ maka T pada bola
2. $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D > 0$ maka T di luar bola
3. $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D < 0$ maka T di dalam bola

Contoh 5

Tentukan kedudukan titik-titik berikut terhadap bola $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y + 4z = 0$

- a. $(1,2,3)$
- b. $(-2,-1,-3)$
- c. $(0,0,0)$

Jawab

- a. $1^2 + 2^2 + 3^2 + 2.1 + 4.2 + 4.3 + 0 = 36$; $36 > 0$ maka titik $(1,2,3)$ terletak **di luar bola**.
- b. $(-2)^2 + (-1)^2 + (-3)^2 + 2.(-2) + 4.(-1) + 4.(-3) + 0 = -6$; $-6 < 0$ maka titik $(-2,-1,-3)$ terletak **di dalam bola**
- c. $0^2 + 0^2 + 0^2 + 2.0 + 4.0 + 4.0 + 0 = 0$; maka titik $(0,0,0)$ terletak **pada bola**

Soal-soal

1. Tuliskan persamaan bola yang pusatnya di titik $(-6,2,-3)$ dan jari-jarinya 2
2. Carilah persamaan bola yang berpusat di titik $(2,4,5)$ dan menyinggung bidang xy
3. Carilah persamaan bola jika diameternya adalah ruas garis yang menghubungkan titik $(-2,3,7)$ dan $(4,-15)$
4. Carilah persamaan bola-bola yang bersinggungan yang titik-titik pusatnya berturut-turut $(-3,1,2)$ dan $(5,-3,6)$ dan jari-jarinya sama
5. Carilah persamaan bola dalam kuadran pertama yang jari-jarinya 6 dan menyinggung bidang-bidang koordinat.

Soal-soal

6. Carilah persamaan bola dengan pusat $(1,1,4)$ dan menyinggung bidang $x + y = 12$
7. Tentukan persamaan bola yang melalui titik-titik $(3,1,-3)$, $(-2,4,1)$ dan $(-5,0,0)$ yang titik pusatnya terletak pada bidang $2x + y - z + 3 = 0$
8. Tentukan persamaan bola yang berjari-jari 3 dan menyinggung bidang $x + 2y + 3z + 3 = 0$ di titik $T(1,1,-3)$
9. Tentukan persamaan bidang singgung pada bola $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 25$ yang sejajar dengan bidang $4x + 3z - 17 = 0$

KUASA TITIK PADA BOLA

Defenisi

Diberikan bola B dan titik P diluar bola, dikonstruksi garis k melalui P dan menembus bola di titik Q dan R.

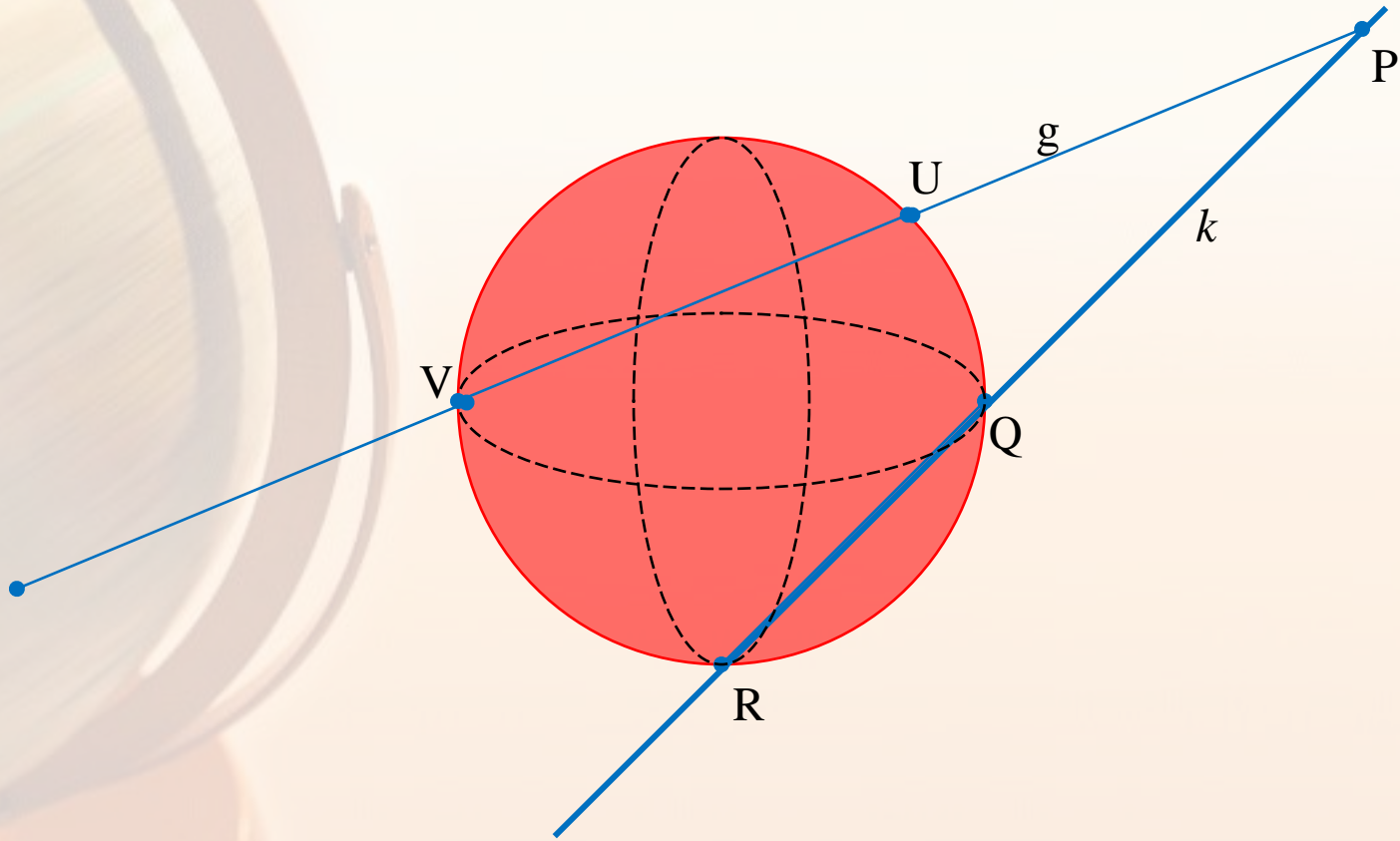
Kuasa titik P pada bola B adalah besaran $PQ \cdot PR$

Jika dikonstruksi garis lain g melalui P dan menembus bola B di titik U dan V, maka kuasa titik P pada bola adalah $PU \cdot PV$

Diskusi

Dikonstruksi garis h melalui P dan menyinggung bola B di titik S. Bagaimana Kuasa titik P pada bola B?

Bagaimana hubungan ketiga kuasa titik P di atas?



Melalui garis g dan k dapat dibuat bidang W (ingat!!! “melalui dua garis dapat dibuat sebuah bidang”) dan bidang W memotong Bola B menurut sebuah lingkaran.
Mengapa?

TUGAS BERPASANGAN

Buktikan, kuasa titik P pada bola B adalah tetap.

Jika diberikan titik $P(x_1, y_1, z_1)$ diluar bola B dengan pusat $M(a, b, c)$ dengan persamaan $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$, maka kuasa titik P pada bola B adalah $k = (x_1-a)^2 + (y_1-b)^2 + (z_1-c)^2 - r^2$

Bukti

Misal garis k melalui titik P dan menembus bola di titik Q dan R , maka $k = PQ \cdot PR$ dan garis g melalui titik P dan pusat bola M serta menembus bola di titik U dan V , maka $k = PU \cdot PV$

$$\begin{aligned} K &= PQ \cdot PR = PU \cdot PV \\ &= (PM + MV) \cdot (PM - PU) \\ &= (PM + r) \cdot (PM - r) \\ &= (PM)^2 - r^2 \\ &= (x_1-a)^2 + (y_1-b)^2 + (z_1-c)^2 - r^2 \end{aligned}$$

DISKUSI

- Jika diberikan titik P (x_1, y_1, z_1) diluar bola B dengan persamaan $x^2 + y^2 + z^2 + 2Ax + 2By + 2Cz + D=0$, tentukan kuasa titik P pada bola B
- Jika P pada bola B, bagaimana kuasa titik P pada bola B?
- Jika P didalam bola B, bagaimana kuasa titik P pada bola B?

CEK PEMAHAMAN

1. Tentukan kuasa titik P (5, 4, -6) dan titik Q (0, -3, 4) pada bola $x^2 + y^2 + z^2 = 25$
2. Tentukan kuasa titik titik pada bola di contoh 5.

BIDANG KUASA

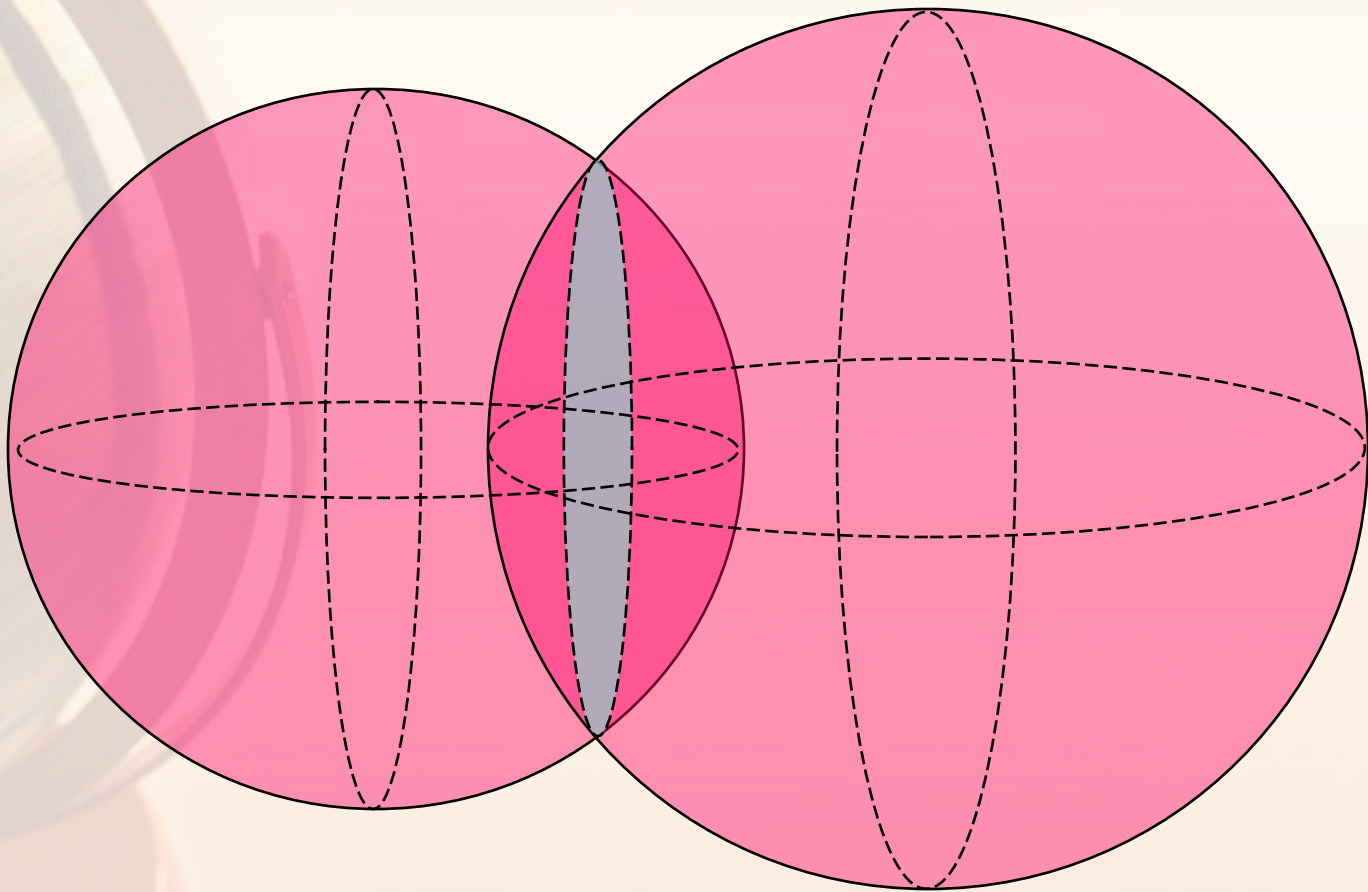
Himpunan titik titik yang berkuasa sama terhadap 2 bola B_1 dan B_2 adalah bidang datar yang disebut **Bidang Kuasa** 2 bola tersebut

TUGAS INDIVIDU

- Jika diberikan titik $P(x_1, y_1)$, bola B_1 dan B_2 dengan persamaan $x^2 + y^2 + z^2 + 2A_1x + 2B_1y + 2C_1z + D_1 = 0$ dan $x^2 + y^2 + z^2 + 2A_2x + 2B_2y + 2C_2z + D_2 = 0$, tentukan persamaan bidang kuasa.
- Jika diberikan titik $P(x_1, y_1)$, bola B_1 dan B_2 dengan persamaan $(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 + (z-c_1)^2 = r^2$ dan $(x-a_2)^2 + (y-b_2)^2 + (z-c_2)^2 = R^2$, tentukan persamaan bidang kuasa.
- Buatlah soal yang berkaitan dengan bidang kuasa!

PENYELIDIKAN

- Bagaimana jika B_1 dan B_2 berpotongan?
Manakah bidang kuasanya?
- Bagaimana jika B_1 dan B_2 saling bersinggungan
di suatu titik? Manakah bidang kuasanya?
- Bagaimana jika B_1 dan B_2 saling lepas?
Manakah bidang kuasanya?
- Bagaimana jika B_1 himpunan bagian B_2 ?
Manakah bidang kuasanya?
- Bagaimana hubungan antara garis yang melalui
pusat lingkaran B_1 dan B_2 dengan bidang kuasa?



GARIS KUASA

Himpunan titik titik yang berkuasa sama terhadap 3 bola B_1 , B_2 dan B_3 adalah garis lurus yang disebut **Garis Kuasa** 3 bola tersebut

- Jika diberikan titik $P(x_1, y_1)$, bola B_1 , B_2 dan B_3 dengan persamaan $x^2 + y^2 + z^2 + 2A_1 x + 2B_1 y + 2C_1 z + D_1 = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 + 2A_2 x + 2B_2 y + 2C_2 z + D_2 = 0$, dan $x^2 + y^2 + z^2 + 2A_3 x + 2B_3 y + 2C_3 z + D_3 = 0$, tentukan persamaan garis kuasa.
- Jika diberikan titik $P(x_1, y_1)$, bola B_1 , B_2 dan B_3 dengan persamaan $(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 + (z-c_1)^2 = r_1^2$, $(x-a_2)^2 + (y-b_2)^2 + (z-c_2)^2 = r_2^2$, $(x-a_3)^2 + (y-b_3)^2 + (z-c_3)^2 = r_3^2$ dan tentukan persamaan garis kuasa.
- Buatlah soal yang berkaitan dengan garis kuasa!

TITIK KUASA

Himpunan titik titik yang berkuasa sama terhadap 3 bola B_1 , B_2 , B_3 dan B_4 adalah sebuah titik yang disebut **Titik Kuasa** 4 bola tersebut

- Jika diberikan titik $P(x_1, y_1)$, bola B_1 , B_2 , B_3 dan B_4 dengan persamaan $x^2 + y^2 + z^2 + 2A_1 x + 2B_1 y + 2C_1 z + D_1 = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 + 2A_2 x + 2B_2 y + 2C_2 z + D_2 = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 + 2A_3 x + 2B_3 y + 2C_3 z + D_3 = 0$, dan $x^2 + y^2 + z^2 + 2A_4 x + 2B_4 y + 2C_4 z + D_4 = 0$ tentukan titik kuasa.
- Buatlah soal yang berkaitan dengan titik kuasa!

MENCOBA

1. Jika diberikan titik P pada sumbu x dan bola B_1 dan B_2 dengan persamaan

$$B_1 : x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 2z - 3 = 0,$$

$$B_2 : x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y + z - 2 = 0.$$

Tentukan koordinat titik P yang berkuasa sama terhadap 2 bola tersebut?

2. Jika diberikan titik P pada sumbu XOY dan bola B_1 , B_2 dan B_3 dengan persamaan

$$B_1 : x^2 + y^2 + z^2 - x - 2y - 4z - 4 = 0,$$

$$B_2 : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - z - 3 = 0, \text{ dan}$$

$B_3 : x^2 + y^2 + z^2 + x + 2y - 4z - 2 = 0$. Tentukan koordinat titik P yang berkuasa sama terhadap 3 bola tersebut?

BERKAS BOLA

Buktikan

Jika diberikan bola B_1 dan B_2 , maka $B_1 + \lambda B_2 = 0$ dengan λ parameter juga merupakan bola. Tentukan pusat dan jari-jari bola ini.

- Bola $B_1 + \lambda B_2 = 0$ dengan λ parameter disebut **berkas bola**. Untuk suatu nilai λ akan didapat sebuah persamaan bola.
- Bola B_1 dan B_2 disebut **anggota dasar dari berkas**

KONJEKTUR

- Bidang kuasa anggota dasar merupakan bidang kuasa setiap dua anggota berkas.

Ujilah konjektur ini dengan menentukan bidang kuasa anggota dasar dan bidang kuasa 2 anggota berkas.

Buktikan konjektur di atas.

- Berkas dari 2 anggota berkas merupakan berkas yang ekuivalen dengan berkas dari anggota dasarnya. **Ujilah konjektur** di atas dengan mengambil beberapa anggota berkas sesuai dengan karakteristik konjektur.

Buktikan konjektur di atas.

- Jika B_1 dan B_2 berpotongan pada lingkaran L maka setiap anggota berkas akan melalui L .

Ujilah dan buktikan.

- Jika B_1 dan B_2 bersinggungan di titik T maka setiap anggota berkas akan melalui T .

Ujilah dan buktikan.

**Jawaban dari permasalahan
konjektur (uji dan buktikan) kirim
ke email:**

megatbudiarto@yahoo.com,

seminggu dari saat tugas diberikan.